座標

点と直線の距離の公式

点 A(p,q) と直線 $ax+by+c=0$ との距離 $\dfrac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ の別証

点 A(p,q) から直線 $ax+by+c=0$ に下ろした垂線の足を点 B(X,Y) とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix} X-p \\ Y-q \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と直線 $ax+by+c=0$ の法線ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ は互いに従属の関係にあるから，

$\begin{pmatrix} X-p \\ Y-q \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ （k は 0 でない実数）

$\therefore X=ka+p$，　$Y=kb+q$　　・・・①

点 B(X,Y) は $ax+by+c=0$ を満たすから，　$aX+bY+c=0$　　・・・②

①，②より，

$a(ka+p)+b(kb+q)+c=0$

$\therefore k=\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}$　　・・・③

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix} X-p \\ Y-q \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ より，　$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{k^2(a^2+b^2)}=|k|\sqrt{a^2+b^2}$　　・・・④

③，④より，

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\dfrac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

3 角形の面積

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ より，

$$\begin{aligned}\Delta\mathrm{AOB}&=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\sin\angle\mathrm{AOB}\\&=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{AOB}}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\cos^2\angle\mathrm{AOB}}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)-\left(ab+cd\right)^2}\\&=\frac{1}{2}\left|ad-bc\right|\end{aligned}$$

この面積公式を使う状況

面積の計算が非常に煩雑になる場合によく使う。

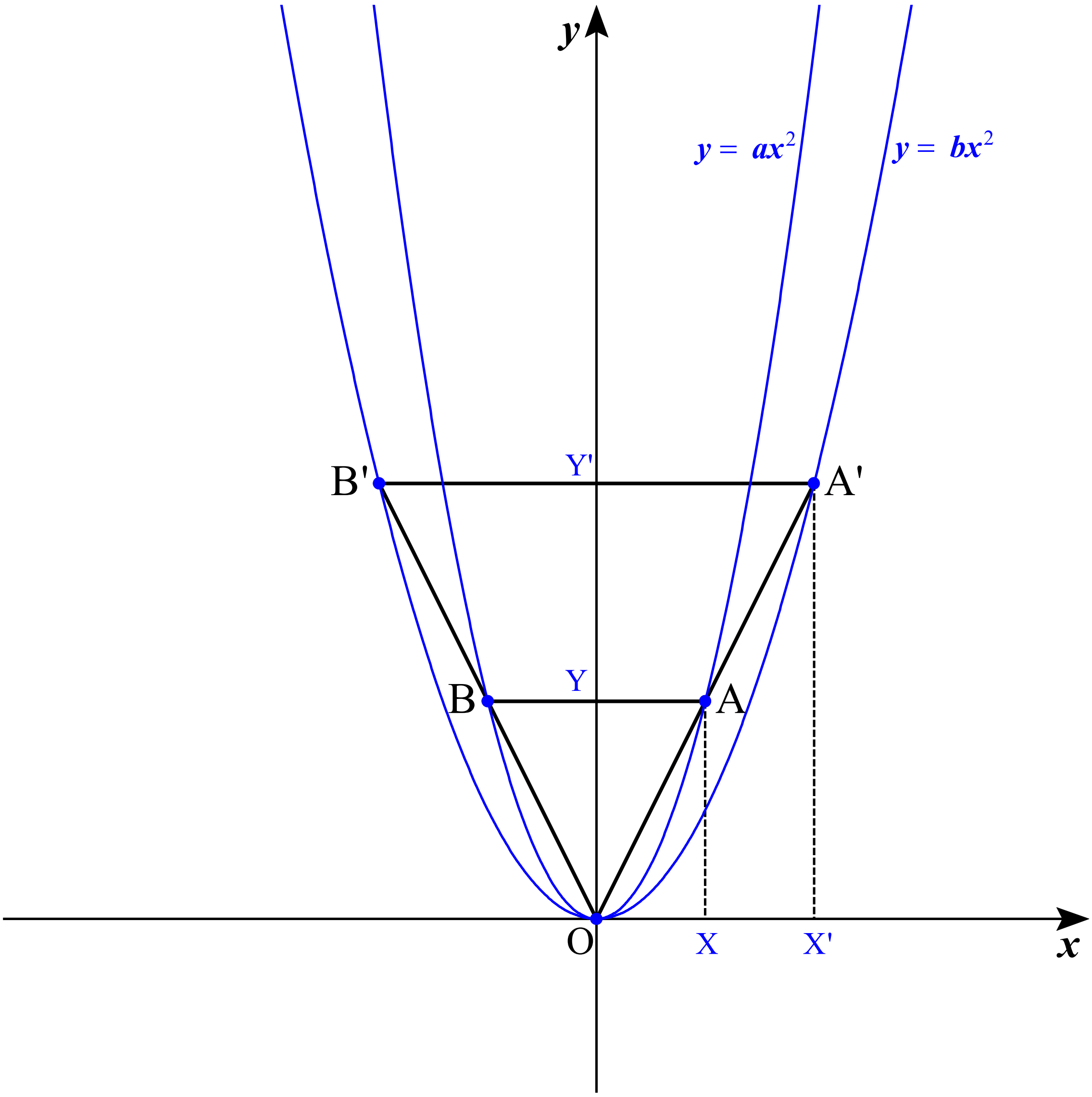
ベクトルの問題の小問として出題される面積問題で使うことが多い。

2 次関数の相似比と相似中心

実数係数の 2 次関数はすべて相似あるいは合同であり，

たとえば，$y=ax^2$ と $y=bx^2$ の相似比は$\left|\dfrac{1}{a}\right|:\left|\dfrac{1}{b}\right|=|b|:|a|$ である。

ここで，$a>0$，$b>0$ の場合を考え，その相似比を求めてみる。



図より，△OAB と△OA'B' の相似比が $y=ax^2$ と $y=bx^2$ の相似比である。

$y=ax^2$ 上の任意の点を (X,Y) とすると，

$\mathrm{Y}=a\mathrm{X}^2$

両辺を $\dfrac{a}{b}$ 倍すると，$\dfrac{a}{b}\mathrm{Y}=\dfrac{a^2}{b}\mathrm{X}^2$

よって，

$$\frac{a}{b}\mathrm{Y}=b\left(\frac{a}{b}\mathrm{X}\right)^2$$

これは，$\left(\dfrac{a}{b}\mathrm{X},\dfrac{a}{b}\mathrm{Y}\right)$ が $y=bx^2$ 上の点であることを示している。

よって，図より，

$$(\mathrm{X}',\mathrm{Y}')=\left(\frac{a}{b}\mathrm{X},\frac{a}{b}\mathrm{Y}\right)$$

ゆえに，

$y=ax^2$ と $y=bx^2$ の相似比は $1:\dfrac{a}{b}$ より $b:a$

別解 1

A' は，$y=\dfrac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}x$ と $y=bx^2$ との交点より，

$$(\mathrm{X}',\mathrm{Y}')=\left(\frac{1}{b}\cdot\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}},\frac{1}{b}\cdot\frac{\mathrm{Y}^2}{\mathrm{X}^2}\right)$$

$\mathrm{Y}=a\mathrm{X}^2$ より，$\dfrac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}=\dfrac{a\mathrm{X}^2}{\mathrm{X}}=a\mathrm{X}$，$\dfrac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}=\dfrac{\mathrm{Y}^2}{\dfrac{\mathrm{Y}}{a}}=a\mathrm{Y}$ だから，

$$(\mathrm{X}',\mathrm{Y}')=\left(\frac{a}{b}\mathrm{X},\frac{a}{b}\mathrm{Y}\right)$$

ゆえに，

$y=ax^2$ と $y=bx^2$ の相似比は $1:\dfrac{a}{b}$ より $b:a$

対応する点の接線の傾きは等しい

2 次関数の相似だから，対応する点の接線の傾きは等しくて当然だが，

一応確かめてみよう。

$y = ax^2$ 上の点 A における接線の傾きを m とすると， $y' = 2ax$ より， $m = 2a\mathrm{X}$

$y = bx^2$ 上の点 A' における接線の傾きを m' とすると， $y' = 2bx$ より， $m' = 2b\mathrm{X}'$

ここで， $\mathrm{X}' = \dfrac{a}{b}\mathrm{X}$ だから， $m' = 2b\mathrm{X}' = 2b \cdot \dfrac{a}{b}\mathrm{X} = 2a\mathrm{X}$

よって， $m = m'$

別解 2

$\triangle$OAB と $\triangle$OA'B' において，対応する点の接線の傾きは等しいことを定理扱いすると，

$y = ax^2$ の点 A における接線の傾きは $2a\mathrm{X}$

$y = bx^2$ の点 A' における接線の傾きは $2b\mathrm{X}'$

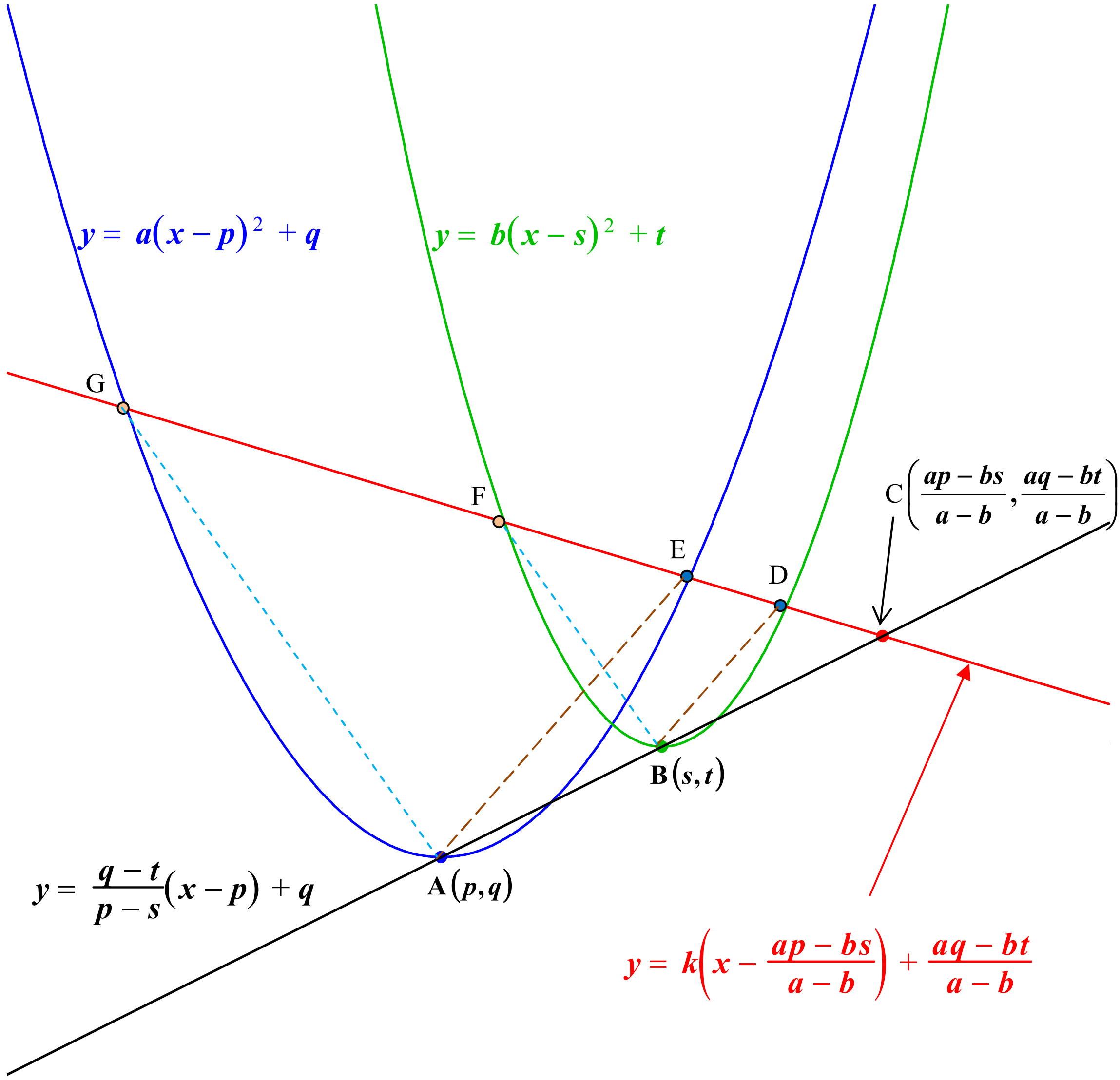
より， $2a\mathrm{X} = 2b\mathrm{X}'$

$\therefore \dfrac{\mathrm{X}'}{\mathrm{X}} = \dfrac{a}{b}\left(= \dfrac{\mathrm{Y}'}{\mathrm{Y}}\right)$

このことから， $y = bx^2$ は， $y = ax^2$ を $\dfrac{a}{b}$ 倍に拡大したものであることがわかる。

よって， $y = ax^2$ と $y = bx^2$ の相似比は $1 : \dfrac{a}{b} = b : a$

$y=a(x-p)^2+q$ と $y=b(x-s)^2+t$ の相似中心の求め方



相似中心を C，$y=a(x-p)^2+q$ と $y=b(x-s)^2+t$ の頂点をそれぞれ A，B とすると，
対応する点の接線の傾きは等しいから，
相似中心 C は，頂点（接線の傾き 0）を結ぶ直線上にあり，
$y=a(x-p)^2+q$ と $y=b(x-s)^2+t$ の相似比が $\dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}$，すなわち $b:a$ であることより，
$\mathrm{AC}:\mathrm{BC}=b:a$，すなわち相似中心 C は，線分 AB を $b:a$ に外分する点である。
よって，$\mathrm{C}\left(\dfrac{ap-bs}{a-b},\dfrac{aq-bt}{a-b}\right)$

相似中心を求めることでどんなことができるか？

ここで，相似中心 C を通る直線の傾きを k （k は実数）とすると，

直線の式は，$y=k\left(x-\dfrac{ap-bs}{a-b}\right)+\dfrac{aq-bt}{a-b}$

この直線と $y=a(x-p)^2+q$，$y=b(x-s)^2+t$ との交点をそれぞれ E，D とすると，

C は相似中心だから，△ACE∽△BCD

対応する点の接線の傾きは等しいから，

点 E における接線と点 D における接線の傾きは等しい。

同様に，点 F における接線と点 G における接線の傾きは等しい。

まとめ

2 次関数の相似中心を通る任意の直線と 2 次関数との交点から，

複数の 2 次関数において，接線の傾きが互いに等しい点を簡単に知ることができる。

物理の放物運動の問題を解くとき，2 次関数の相似性を利用する解き方もある。

参考：物理重要問題集Ⅰ・Ⅱを解いてみた 038 床や壁との斜めの衝突

補足

外分点の公式の導き方

AB を $m:n$ に外分する点を C とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}:\overrightarrow{\mathrm{BC}}=m:n$ より，

$n\overrightarrow{\mathrm{AC}}=m\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

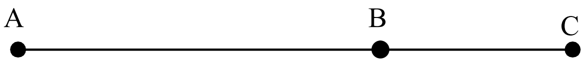
$n\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=m\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

$n\overrightarrow{\mathrm{OC}}-n\overrightarrow{\mathrm{OA}}=m\overrightarrow{\mathrm{OC}}-m\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$(m-n)\overrightarrow{\mathrm{OC}}=m\overrightarrow{\mathrm{OB}}-n\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{m\overrightarrow{\mathrm{OB}}-n\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{m-n}$$



同様に，

AB を $m:n$ に内分する点を D とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}:\overrightarrow{\mathrm{DB}}=m:n$ より，

$n\overrightarrow{\mathrm{AD}}=m\overrightarrow{\mathrm{DB}}$

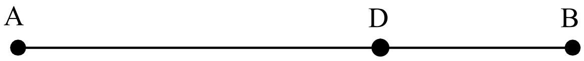
$n\left(\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=m\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)$

$n\overrightarrow{\mathrm{OD}}-n\overrightarrow{\mathrm{OA}}=m\overrightarrow{\mathrm{OB}}-m\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

$(m+n)\overrightarrow{\mathrm{OD}}=m\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{m\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{m+n}$$



円の接線の公式とその導き方

円の接線の公式

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ で表される円周上の点 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$ を通る接線の方程式は，

$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$

導き方 1

円の中心を C，接線上の P でない点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$

これと $\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{pmatrix}x_0-a\\y_0-b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}=(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-b)$ より，

$(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-b)=0$

これは $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ についても成り立つ。

よって，接線の方程式は $(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-b)=0$

実用上はこれで十分だが，これをさらに接線の公式に変形してみる。

$$\begin{aligned}(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-b)&=(x_0-a)\{(x-a)-(x_0-a)\}+(y_0-b)\{(y-b)-(y_0-b)\}\\&=(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)-\{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2\}\\&=(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)-r^2\end{aligned}$$

より，$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)-r^2=0$

すなわち $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$

導き方 2

接線の傾きを m とすると，接点 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$ における接線の方程式は，$y=m(x-x_0)+y_0$

次に，点 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$ における接線の傾き m を微分により求める。

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を x について微分すると，

$\dfrac{d(x-a)^2}{dx}+\dfrac{d(y-b)^2}{dx}=0$ より，$\dfrac{d(x-a)^2}{dx}+\dfrac{d(y-b)^2}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

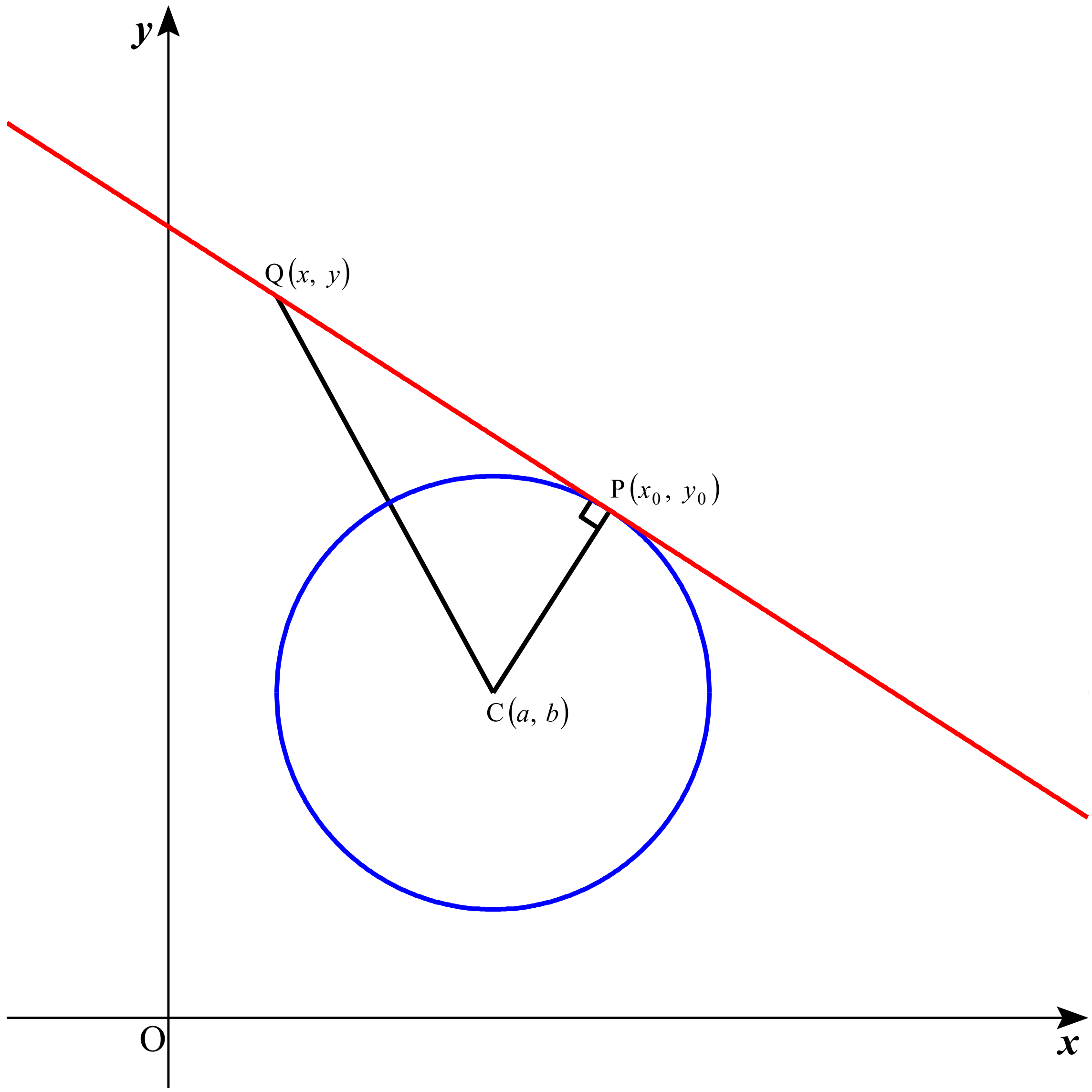
よって，$2(x-a)+2(y-b)\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

$(x,\ y)\neq(a,\ b)$ より，$m=\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x-a}{y-b}$

ゆえに，接線の方程式は，$y=\dfrac{x_0-a}{y_0-b}(x-x_0)+y_0$

実用上はこれで十分である。

これを $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$ に変形する手順は導き方 1 と同じ。


y
Q$(x,\ y)$
P$(x_0,\ y_0)$
C$(a,\ b)$
O
x

例題 2　直線／角の二等分線

別解の別解

$8x-y=0$ と $4x+7y-2=0$ の交点は，$\begin{cases}8x-y=0\\4x+7y-2=0\end{cases}$ の解より，$\left(\dfrac{1}{30},\dfrac{4}{15}\right)$

また，$8x-y=0$ より，ベクトル $\begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}$ は $8x-y=0$ の法線ベクトル，

$4x+7y-2=0$ より，ベクトル $\pm\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$ は $4x+7y-2=0$ の法線ベクトルであるから，

求める直線は，これらの法線ベクトルの 2 等分線を法線ベクトルとし，

点 $\left(\dfrac{1}{30},\dfrac{4}{15}\right)$ を通る直線である。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}=\begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$ とすると，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=\sqrt{65}$ であるから，

△OAB の∠O の二等分線は，すなわち $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の 2 等分線は AB の中点を通る。

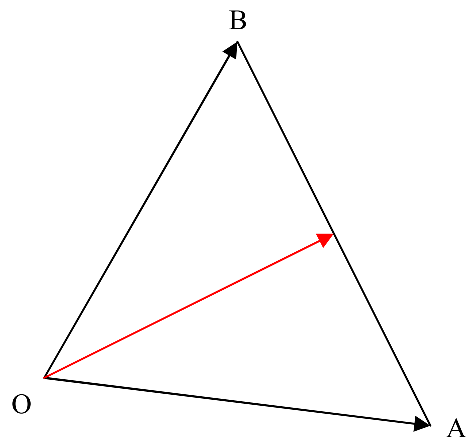
よって，2 等分線のベクトルは，$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

したがって，求める直線の方程式を $2x+y+p=0$ とおくと，

点 $\left(\dfrac{1}{30},\dfrac{4}{15}\right)$ を通ることから，$2\cdot\dfrac{1}{30}+\dfrac{4}{15}+p=0$　$\therefore p=-\dfrac{1}{3}$

よって，$2x+y+\dfrac{1}{3}=0$

ゆえに，$6x+3y-1=0$



同様にして，ベクトル$\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$とベクトル$\begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix}$の 2 等分線を法線ベクトルとし，

点$\left(\dfrac{1}{30}, \dfrac{4}{15}\right)$を通る直線の方程式を求めることにより，

求める直線の方程式は，$2x-4y+1=0$となる。

例題 4　直線／折り返し

(1)

別解

AC の中点は直線l上の点だから，$\mathrm{C}(a,b)$とすると$\left(\dfrac{a+1}{2}, \dfrac{b+4}{2}\right)$は$y=\dfrac{1}{2}x+1$を満たす。

よって，$\dfrac{b+4}{2}=\dfrac{a+1}{4}+1 \quad \therefore a-2b=3$　・・・①

直線$l \perp \mathrm{AC}$より，$y=\dfrac{1}{2}x+1$の方向ベクトルと$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix} a-1 \\ b-4 \end{pmatrix}$の内積は 0 である。

よって，$\begin{pmatrix} a-1 \\ b-4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=2a+b-6=0 \quad \therefore 2a+b=6$　・・・②

①，②より，$\mathrm{C}(a,b)=(3,0)$

例題 5　三角形の面積

別解補充

点 P を通り直線 AB に平行な直線を直線lとすると，

点 A，点 B，直線lと$y=x^2$の交点を頂点とする三角形の面積は等しい。

直線 AB と直線lの間隔が最も大きくなるのは直線lが点 P で$y=x^2$と接するときである。

例題 6　放物線／接線

別解

(1)

接点を(t,t^2)とする接線の方程式は，$y=2t(x-t)+t^2$ より，$y=2tx-t^2$

点(a,b)を通る 2 つの接線が存在するには，$b=2ta-t^2$ を満たす異なる実数tが 2 つ存在すればよい。すなわち，tについての 2 次方程式$t^2-2at+b=0$ が異なる 2 実数解をもてばよいから，判別式をDとすると，$a^2-4b>0$ より，$a^2>4b$ ・・・①

次に，接線が直交するためには，接線の傾きの積が-1であればよい。

そこで，$t^2-2at+b=0$ の解，すなわち接点のx座標をα,βとすると，

接線の傾きはそれぞれ$2\alpha,2\beta$ だから，$2\alpha\cdot 2\beta=-1$　$\therefore 4\alpha\beta=-1$

これと，解と係数の関係から，$\alpha\beta=b$ であることより，$4b=-1$　$\therefore b=-\dfrac{1}{4}$　・・・②

②は①を満たすから，$b=-\dfrac{1}{4}$ （aは任意）　・・・答

(2)

2 接点(α,α^2)，(β,β^2)を通る直線の方程式

$y=\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+\alpha^2$ より，$y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$

これと$\alpha+\beta=2a$，$\alpha\beta=b=-\dfrac{1}{4}$ より，$y=2ax+\dfrac{1}{4}$

よって，常に通る定点は，$\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$　・・・**(2)**の答

例題 7　放物線，円／弦の長さ

(ア)

別解

P，Q の座標を$(\alpha,3\alpha+k)$，$(\beta,3\beta+k)$とおくと，$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+\{(3\alpha+k)-(3\beta+k)\}^2}=5\sqrt{10}$

両辺を 2 乗してから整理すると，$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=25$　・・・①

α,βはxについての 2 次方程式$x^2-6x+10=3x+k$，

すなわち$x^2-9x+10-k=0$ の異なる 2 実数解だから，

判別式をDとすると，$D=81-4(10-k)>0$　$\therefore k>-\dfrac{41}{4}$　・・・②

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=9$，$\alpha\beta=10-k$

これらを①に代入して，kを求めると，$k=-4$

これは②を満たす。よって，$k=-4$

例題 10　円／接線

円の接線の公式とその導き方

円の接線の公式

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ で表される円周上の点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ を通る接線の方程式は，

$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$

導き方 1

円の中心を C，接線上の P でない点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$

これと $\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{pmatrix} x_0-a \\ y_0-b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}=(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-b)$ より，

$(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-b)=0$

これは $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ についても成り立つ。

よって，接線の方程式は $(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-b)=0$

実用上はこれで十分だが，これをさらに接線の公式に変形してみる。

$$\begin{aligned}(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-b)&=(x_0-a)\{(x-a)-(x_0-a)\}+(y_0-b)\{(y-b)-(y_0-b)\}\\&=(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)-\left\{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2\right\}\\&=(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)-r^2\end{aligned}$$

より，$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)-r^2=0$

すなわち $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$

導き方 2

接線の傾きを m とすると，接点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ における接線の方程式は，$y=m(x-x_0)+y_0$

次に，点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ における接線の傾き m を微分により求める。

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を x について微分すると，

$\dfrac{d(x-a)^2}{dx}+\dfrac{d(y-b)^2}{dx}=0$ より，$\dfrac{d(x-a)^2}{dx}+\dfrac{d(y-b)^2}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

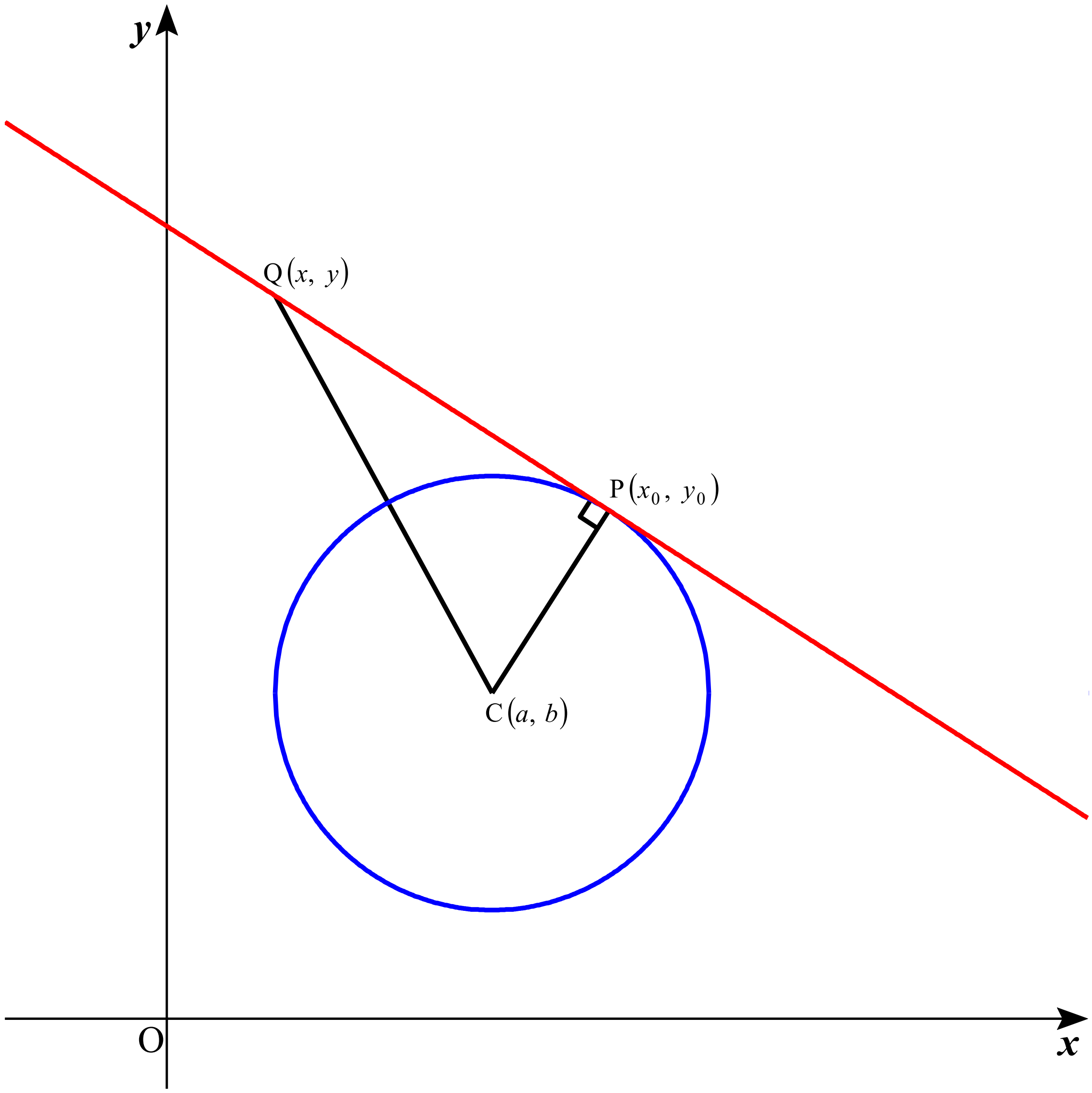
よって，$2(x-a)+2(y-b)\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

$(x,\ y)\neq(a,\ b)$ より，$m=\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x-a}{y-b}$

ゆえに，接線の方程式は，$y=\dfrac{x_0-a}{y_0-b}(x-x_0)+y_0$

実用上はこれで十分である。

これを $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$ に変形する手順は導き方 1 と同じ。



例題 13　軌跡／逆手流

補足

$\vec{n}_1=\begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{n}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ とすると，$\vec{n}_1,\ \vec{n}_2$ はそれぞれ直線①，②の法線ベクトルであり，

$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=m\cdot 1+(-1)\cdot m=0$ より，①と②は常に直交する。

したがって，任意の実数 m に対しただ 1 つの共有点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ が存在する。

これは①と②の交点を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とすると，

$\begin{cases} mX-Y=0 \\ X+mY-m-2=0 \end{cases}$ を満たす実数解 m が存在することと同値である。

例題 14　軌跡／反転

(1)

略解

Q は半直線 OP 上の点だから，$\mathrm{P}(x,\ y)$ と $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ は同一象限上の点である。
したがって，正の実数 t を用いて，$(x, y)=(tX, tY)$ と表せる。

これと $\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{X^2+Y^2}=2$ より，$t(X^2+Y^2)=2$　$\therefore t=\dfrac{2}{X^2+Y^2}$

ゆえに，$(x, y)=\left(\dfrac{2X}{X^2+Y^2}, \dfrac{2Y}{X^2+Y^2}\right)$

別解

重要

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は単位ベクトル $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|}$ を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|}$ と表せることと，

条件より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\neq 0$ かつ $\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|\neq 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の向きが同じだから，

単位ベクトル $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}$ であることを利用すると，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|}\\
&=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}\\
&=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|} \quad \Leftarrow \times\frac{f(x)}{f(x)} \text{ のテクニック（適用範囲が数学全体に渡る重要テクニック）}\\
&=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\
&=\frac{2}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}
\end{aligned}$$

より，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\dfrac{2}{X^2+Y^2}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$　　$\therefore x=\dfrac{2X}{X^2+Y^2}$，$y=\dfrac{2Y}{X^2+Y^2}$

反転とは

半径 r の円の中心と異なる任意の点 P に対して，線分 OP またはその P の側への延長上に，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=r^2$ となるような点 Q を対応させるとき，このような点の変換を反転といい，O を反転の中心という。

$$(X,Y)=\left(\frac{r^2x}{x^2+y^2},\frac{r^2y}{x^2+y^2}\right),\quad (x,y)=\left(\frac{r^2X}{X^2+Y^2},\frac{r^2Y}{X^2+Y^2}\right)$$

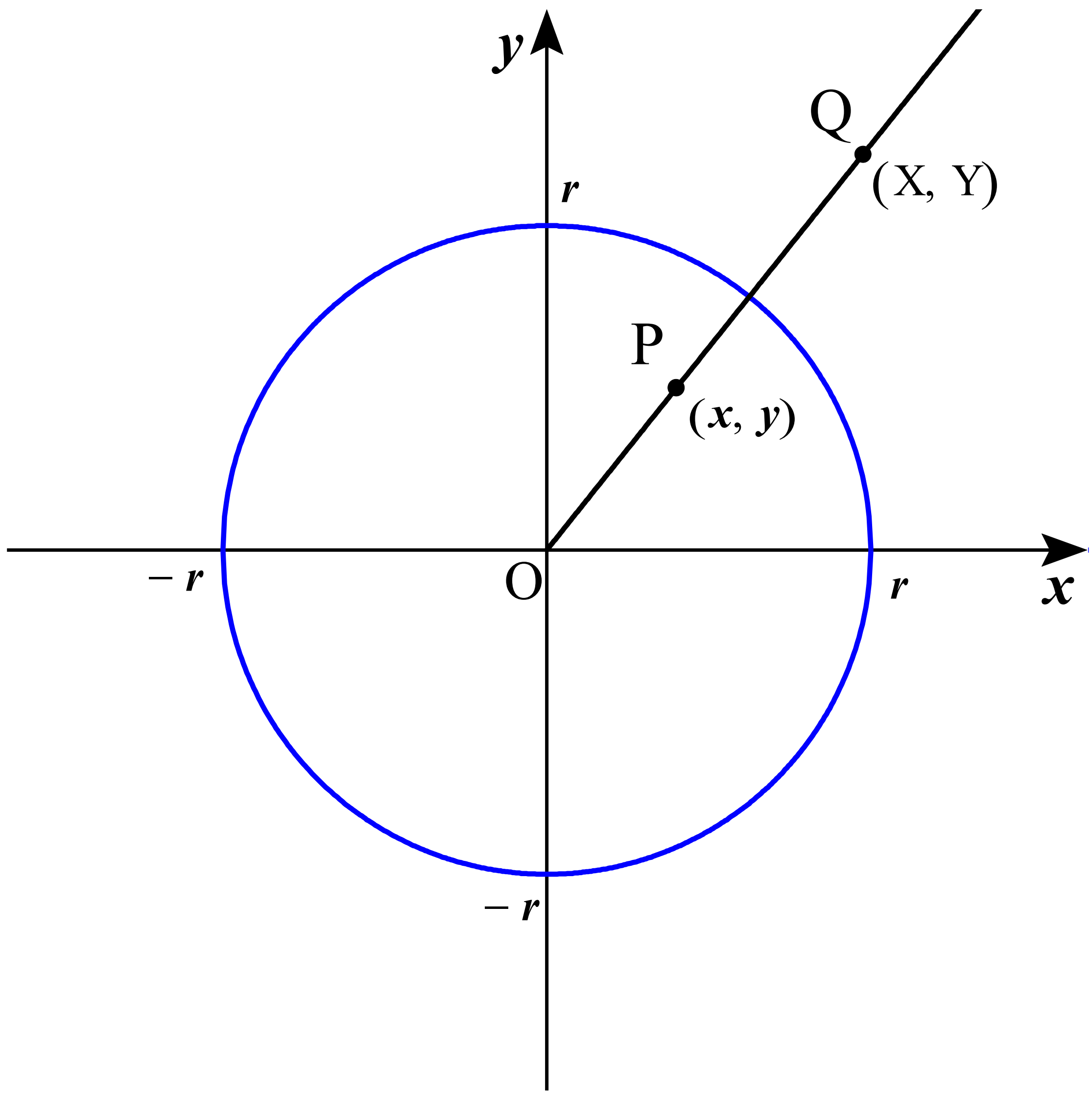
反転によって，

原点を通る直線 $y=mx$ → 同じ直線 $y=mx$

原点を通らない直線 → 原点を通る円

原点を通る円 → 原点を通らない直線

原点を通らない円 → 原点を通らない円



反転の例題

xy 平面上の y 軸に平行な直線 $x=1$ を l とする。

l 上の点 P に対して，次の 3 つの条件を満たす点 Q を対応させる。

(A)　原点を O とするとき，Q は直線 OP 上にある。

(B)　Q の x 座標は負である。

(C)　線分 AB の長さを $\left|\mathrm{AB}\right|$ で表すとき，$\left|\mathrm{OP}\right|\left|\mathrm{OQ}\right|=1$ を満たす。

P が l 上を動くとき，Q の軌跡を求めよ。

解法 1：ベクトルで解く

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1,y)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(X,Y)$ $(X<0)$ とすると，

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|=1$ より，点 Q は原点を通らない。すなわち $(X,Y)\neq(0,0)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|}\\&=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\cdot\left(-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}\right)\qquad\left(\because\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)\\&=-\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\cdot\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}\\&=-\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\&=-\frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\end{aligned}$$

より，

$\begin{pmatrix}1\\y\end{pmatrix}=-\dfrac{1}{X^2+Y^2}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$，ただし $(X,Y)\neq(0,0)$

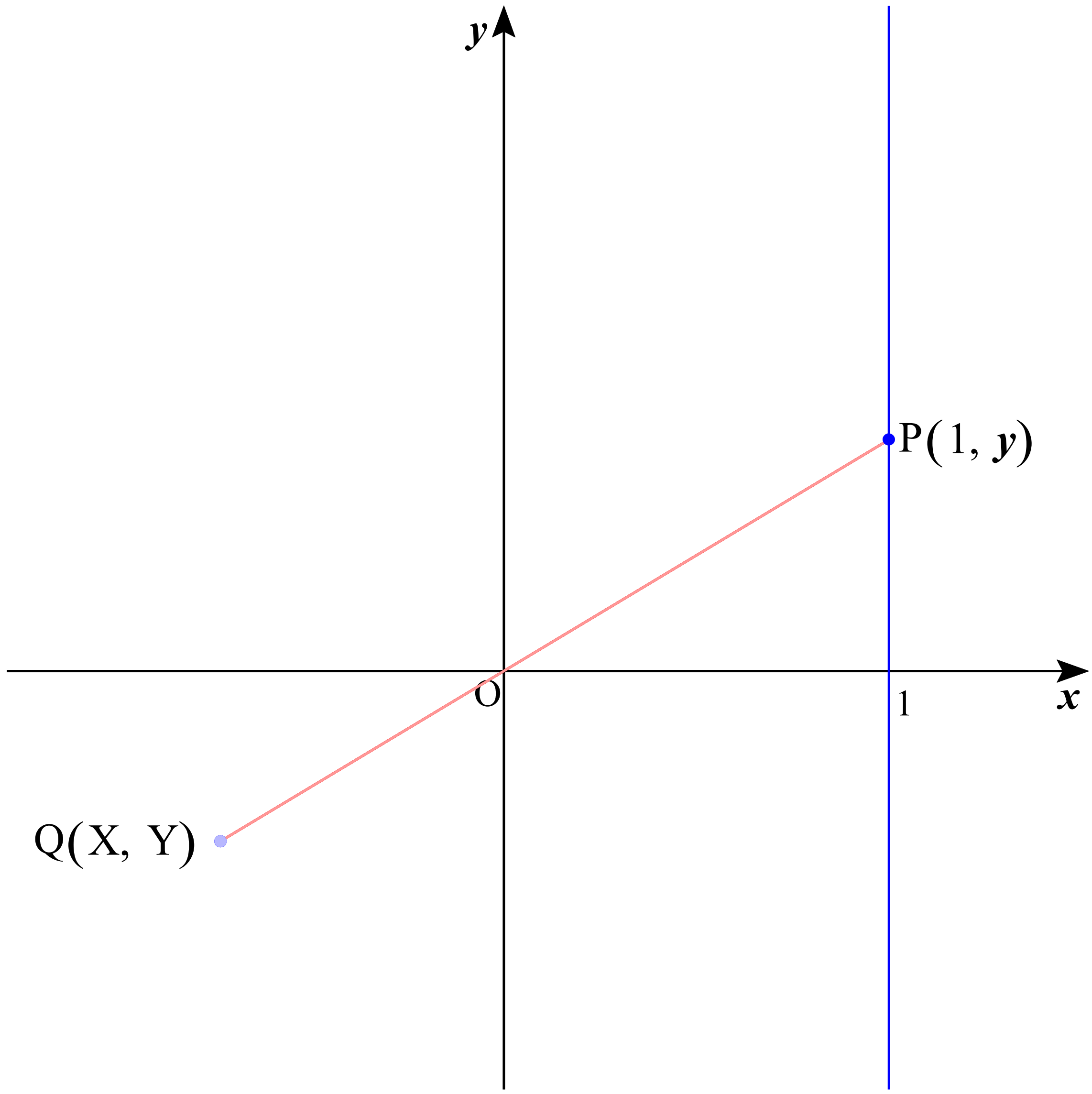
$$\therefore 1=-\frac{X}{X^2+Y^2}$$

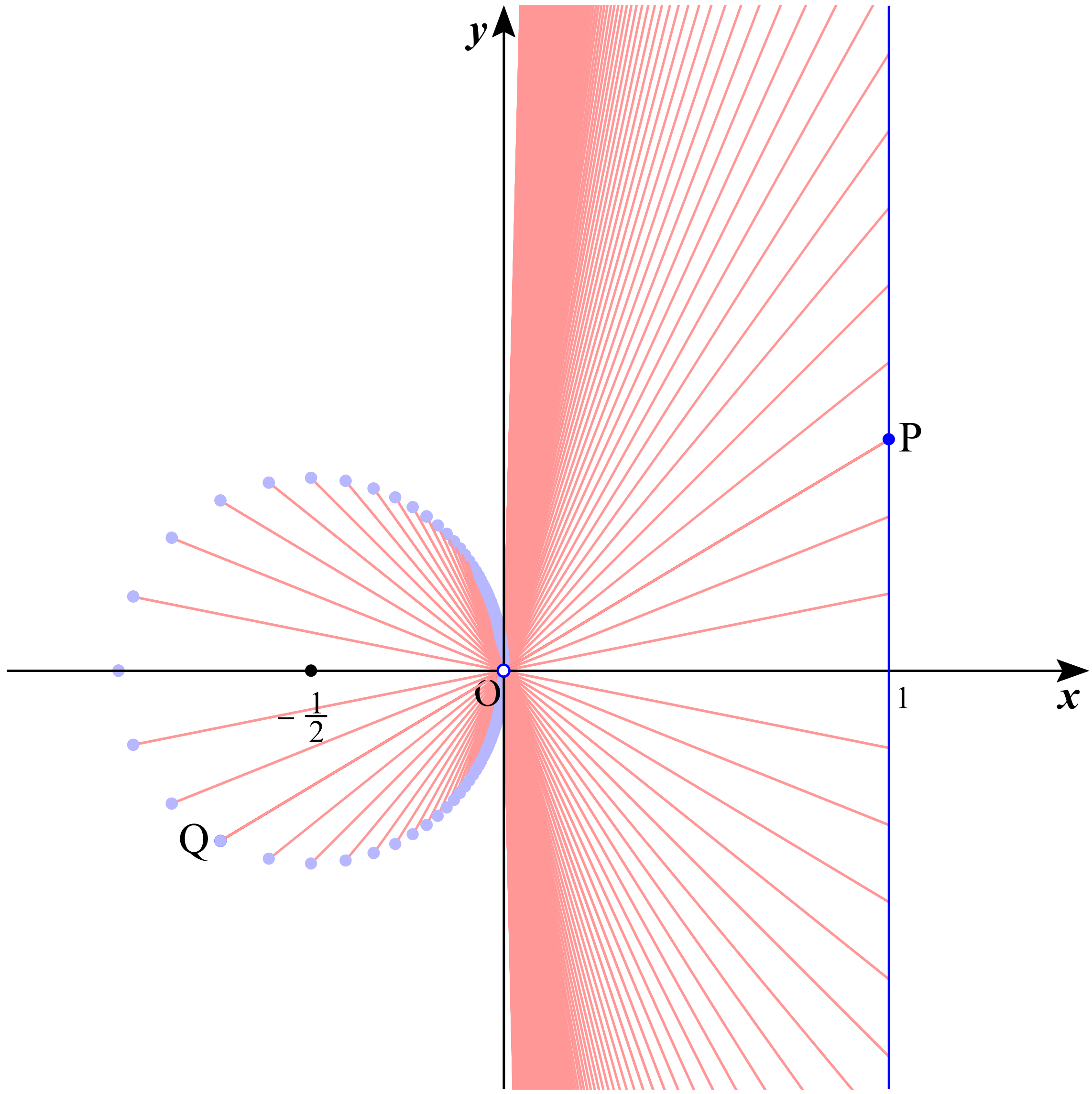
(X,Y) を (x,y) に書き改め，上式を整理することにより，

点 Q の軌跡は,

$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$，ただし $(x,y)\neq(0,0)$

と表せる。


y
P(1, y)
O
1
x
Q(X, Y)


y
P
O
1
x
$-\frac{1}{2}$
Q

解法 2：パラメータ（媒介変数）を使って解く

$\mathrm{P}(1,t)$，$\mathrm{Q}(X,Y)\ (X<0)$とおくと，

$\mathrm{OP}=\sqrt{1+t^2}$，$\mathrm{OQ}=\sqrt{X^2+Y^2}$

条件より，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=1$だから，$\sqrt{1+t^2}\sqrt{X^2+Y^2}=1$

$\therefore\sqrt{(1+t^2)(X^2+Y^2)}=1$　・・・①

Qは直線OP，すなわち$y=tx$上の点だから，$Y=tX$

$\therefore t=\dfrac{Y}{X}\ (X<0)$　・・・②

①，②より，$\sqrt{\left\{1+\left(\dfrac{Y}{X}\right)^2\right\}(X^2+Y^2)}=1$すなわち$\sqrt{\dfrac{X^2+Y^2}{X^2}(X^2+Y^2)}=1$

$\therefore\dfrac{X^2+Y^2}{|X|}=1$

ここで，$X<0$より，$|X|=-X$

ゆえに，$\dfrac{X^2+Y^2}{-X}=1$

(X,Y)を(x,y)に書き改め，上式を整理することにより，

点Qの軌跡は,

$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$，ただし$(x,y)\neq(0,0)$

と表せる。

例題 16　通過範囲／ファクシミリの原理

(1)

別解：ベクトルを用いた解法

求める直線の法線ベクトルは$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}$で，OAの中点$\left(\dfrac{t}{2},\dfrac{1}{2}\right)$を通るから，

その方程式は$t\cdot\left(x-\dfrac{t}{2}\right)+1\cdot\left(y-\dfrac{1}{2}\right)=0$すなわち$tx+y-\dfrac{t^2+1}{2}=0$

例題 17　**2** 変数関数への応用／線形計画法（1）

(1)

別解

$ax+y=k$ とすると，$ax+y-k=0$

$ax+y-k=0$ が $(0,\ 5)$ を通るとき，$5-k=0$　$\therefore k=5$

$ax+y-k=0$ が $(3,4)$ を通るとき，$3a+4-k=0$　$\therefore k=3a+4$

$ax+y-k=0$ が $(5,\ 0)$ を通るとき，$5a-k=0$　$\therefore k=5a$

$k=5$ が最大値となるとき

$\begin{cases} 5 \geq 3a+4 \\ 5 \geq 5a \end{cases}$ より，$a \leq \dfrac{1}{3}$

$k=3a+4$ が最大値となるとき

$\begin{cases} 3a+4 \geq 5 \\ 3a+4 \geq 5a \end{cases}$ より，$\dfrac{1}{3} \leq a \leq 2$

$k=5a$ が最大値となるとき

$\begin{cases} 5a \geq 5 \\ 5a \geq 3a+4 \end{cases}$ より，$2 \leq a$

よって，

$ax+y$ は

$a \leq \dfrac{1}{3}$ のとき，$(0,\ 5)$ を通るとき最大値 5 をとる。

$\dfrac{1}{3} \leq a \leq 2$ のとき，$(3,4)$ を通るとき最大値 $3a+4$ をとる。

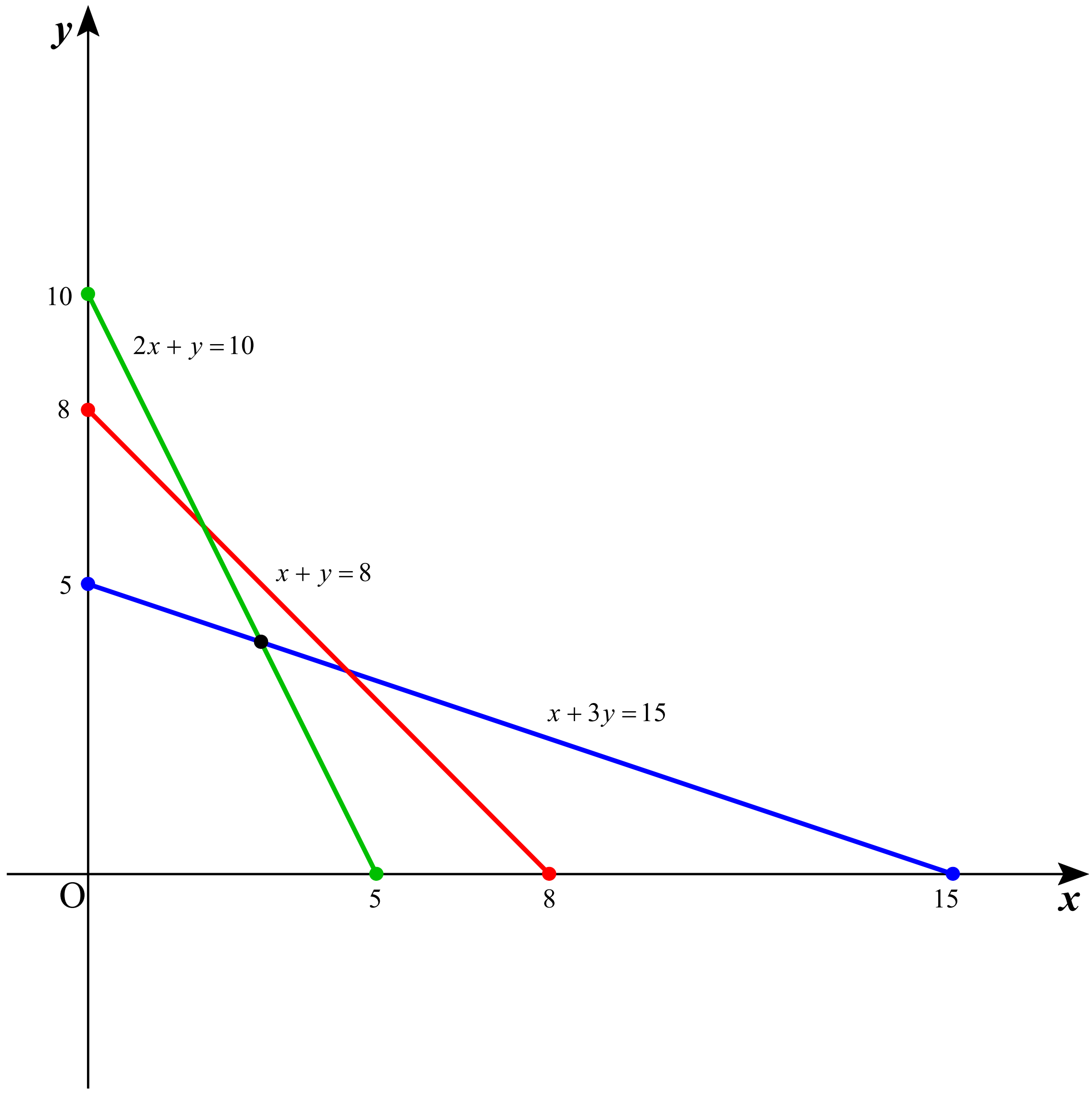
$2 \leq a$ のとき，$(5,\ 0)$ を通るとき最大値 $5a$ をとる。

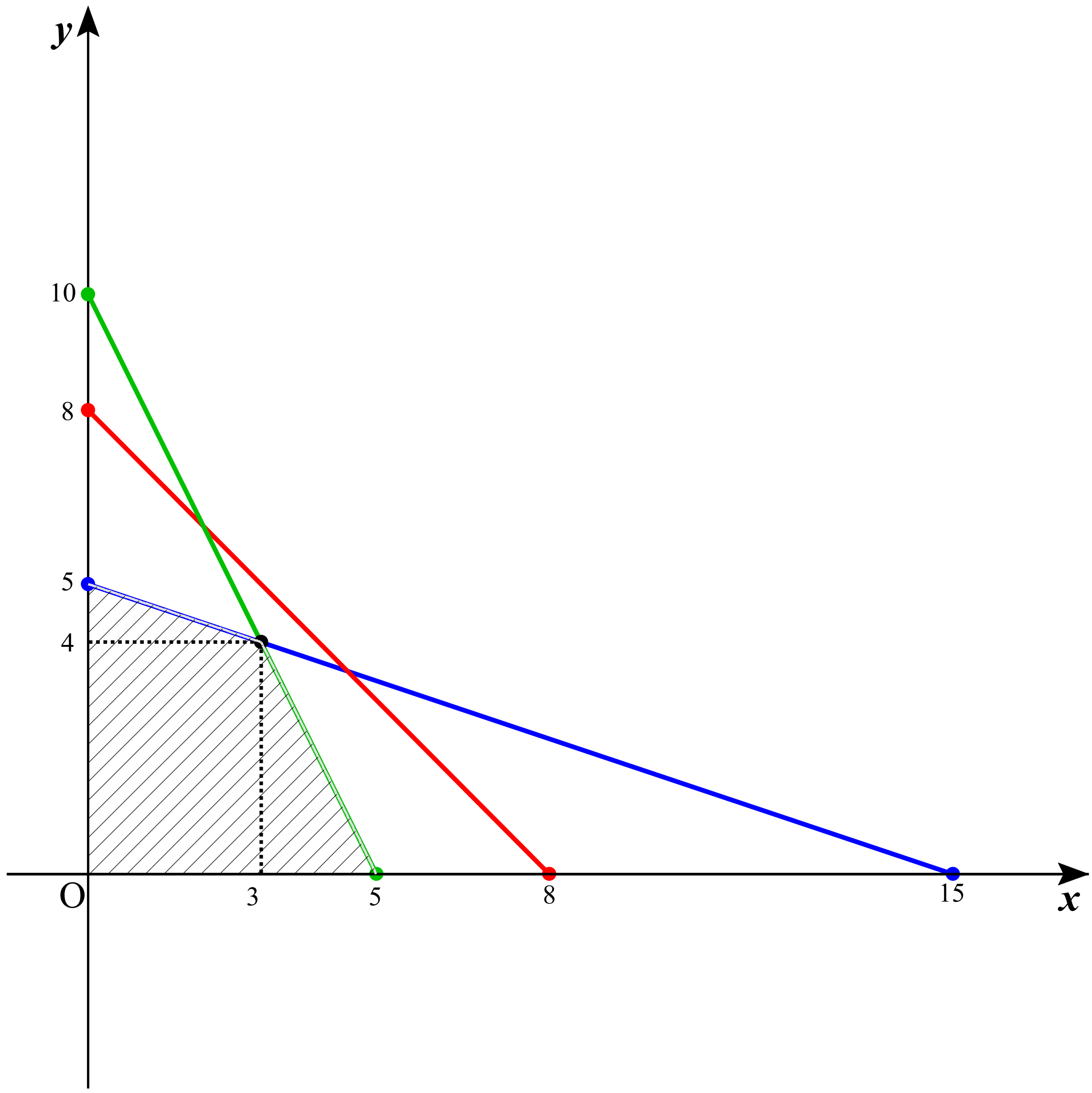
補足：グラフを素早く描くコツ（切片方程式）

$x+3y=15 \Leftrightarrow \frac{x}{15}+\frac{y}{5}=1$ より，$x+3y=15$ と x 軸，y 軸との交点はそれぞれ $(15,0)$，$(0,5)$

$x+y=8 \Leftrightarrow \frac{x}{8}+\frac{y}{8}=1$ より，$x+y=8$ と x 軸，y 軸との交点はそれぞれ $(8,0)$，$(0,8)$

$2x+y=10 \Leftrightarrow \frac{x}{5}+\frac{y}{10}=1$ より，$2x+y=10$ と x 軸，y 軸との交点はそれぞれ $(5,0)$，$(0,10)$

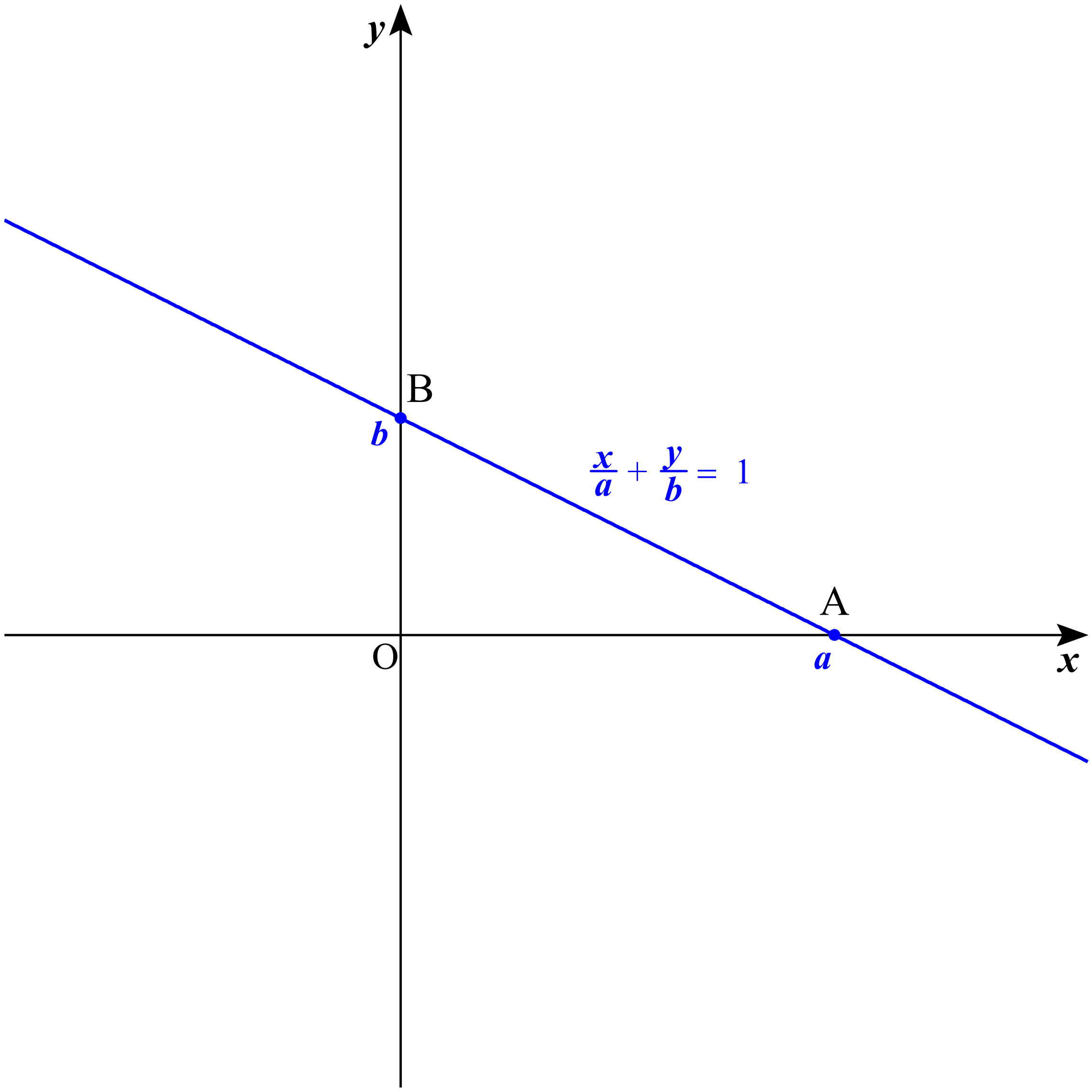



y
10
8
5
4
O
3
5
8
15
x

切片と直線の方程式・平面の方程式

x 切片を a，y 切片を b とする直線の方程式

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$（$a,b$ は 0 でない実数）

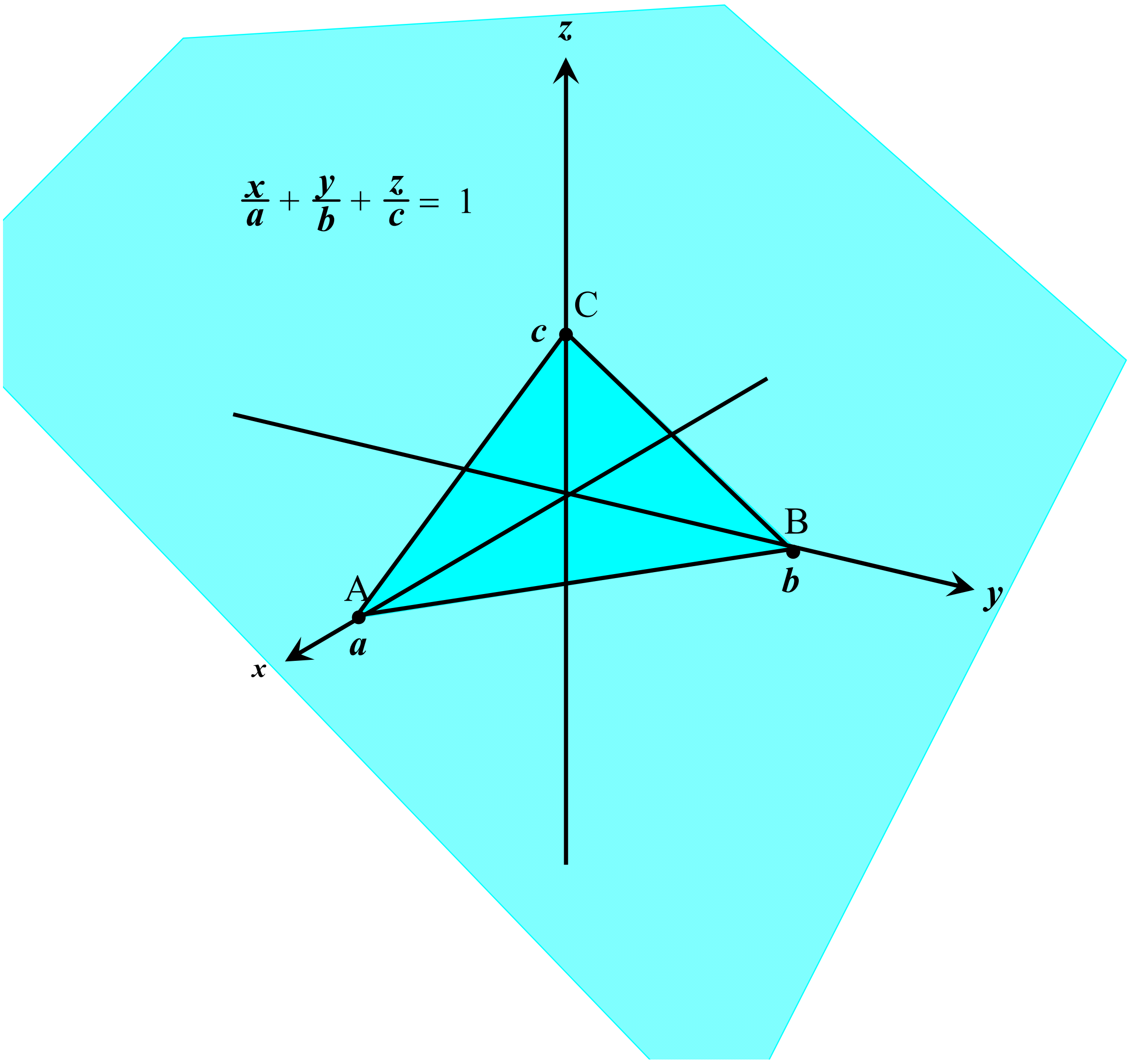


証明

A$(a,0)$，B$(0.b)$を通る直線の方程式は，$y=-\dfrac{b}{a}x+b$ $\therefore \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

x 切片を a， y 切片を b， z 切片を c とする平面の方程式

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ （a,b,c は 0 でない実数）



証明

A$(a,0,0)$，B$(0.b,0)$，C$(0,0,c)$を通る平面の方程式を $px+qy+rz=s$ とすると，

$pa=qb=rc=s$ より， $p=\dfrac{s}{a},q=\dfrac{s}{b},r=\dfrac{s}{c}$ $\quad\therefore\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

例題 18　2 変数関数への応用／線形計画法（2）

(2)

補足：$x+2y=k$ が領域 D の $x^2+y^2=25$ と接するときの k の値の別解（略解）

$x+2y=k$，すなわち $\dfrac{1}{k}x+\dfrac{2}{k}y-1=0$　・・・①　の接点の座標を $(x_0,\ y_0)$ とすると，

接線の方程式は $x_0x+y_0y=25$，すなわち $\dfrac{x_0}{25}x+\dfrac{y_0}{25}y-1=0$　・・・②

①と②は同値式だから，$\dfrac{1}{k}=\dfrac{x_0}{25},\ \dfrac{2}{k}=\dfrac{y_0}{25}$　$\therefore (x_0,\ y_0)=\left(\dfrac{25}{k},\ \dfrac{50}{k}\right)$

これと ${x_0}^2+{y_0}^2=25$ より，$\left(\dfrac{25}{k}\right)^2+\left(\dfrac{50}{k}\right)^2=25$　$\therefore k=\pm5\sqrt{5}$

$k=5\sqrt{5}$ のとき

$$(x_0,\ y_0)=\left(\frac{25}{5\sqrt{5}},\ \frac{50}{5\sqrt{5}}\right)=\left(\sqrt{5},\ 2\sqrt{5}\right)$$

これは領域 D に含まれる。

$k=-5\sqrt{5}$ のとき

$$(x_0,\ y_0)=\left(\frac{25}{-5\sqrt{5}},\ \frac{50}{-5\sqrt{5}}\right)=\left(-\sqrt{5},\ -2\sqrt{5}\right)$$

これは領域 D に含まれない。

よって，$x+2y=k$ が領域 D の $x^2+y^2=25$ と接するときの k の値は $5\sqrt{5}$ であり，

接点の座標は $\left(\sqrt{5},\ 2\sqrt{5}\right)$